Решения на задачите от кандидат-студентския изпит по математика, проведен на 17.04.2010, в ЮЗУ "Н. Рилски" – Благоевград.

Задача 1. Да се реши неравенството

$$\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}}(6^{x+1}-36^{x})\geq -2.$$

Решение. Тъй като $6^{x+1}-36^{x}=6.6^{x}-\left(6^{x}\right)^{2}$, можем да положим $6^{x}=u>0$ и да намерим решенията на неравенството

$$\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}}(6u-u^{2})\geq -2$$

и след това да се върнем към полагането.

ДМ за u определяме от неравенството $6u-u^{2}>0$, защото логаритмичната функция е дефинирана само за положителни стойности на аргумента. Корените на уравнението $6u-u^{2}=0$ са числата 0 и 6, от което следва, че неравенството е изпълнено за $u\in(0,6)$. Следователно ДМ за u е $u\in(0,6)$.

Тъй като $-2=\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{-2}=\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}}5$, то като вземем предвид, че логаритмичната функция е намаляваща при основа по-малка от 1, получаваме неравенството

$$6u-u^{2}\leq 5.$$

Корените на уравнението $-u^{2}+6u-5=0$ са числата 1 и 5, и следователно решенията на неравенството са $u\in(-\infty,1]\cup[5,+\infty)$. Като използваме и ДМ $u\in(0,6)$ следва, че решенията на задачата относно u са $u\in(0,1]\cup[5,6)$.

Сега се връщаме към полагането $u=6^{x}$. Когато $u\in(0,1]$, т.е. $0<6^{x}\leq 1=6^{0}$ следва, че $x\in(-\infty,0]$, а от $u\in[5,6)$, т.е. $5\leq 6^{x}<6$ следва, че $x\in[\log_{6}5,1)$.

Решенията на неравенството са $x\in(-\infty,0]\cup[\log_{6}5,1)$

Задача 2. Да се реши системата уравнения

$$\left|\begin{array}{l} x+y-xy=1 \\ x^{2}+y^{2}-xy=3. \end{array}\right.$$

Решение. От първото уравнение, което представяме във вида $x+y=xy+1$, след повдигане на двете страни в квадрат получаваме $x^{2}+y^{2}=(xy)^{2}+1$. Тогава второто уравнение приема вида $(xy)^{2}+1-xy=3$,т.е. $(xy)^{2}-xy-2=0$. Това квадратно уравнение за xy има корени 2 и -1.

1)Нека $xy=2$. Тогава първото уравнение на системата става $x+y=3$ и правим системата

$$\left|\begin{array}{l} x+y=3 \\ xy=2. \end{array}\right.$$

Решенията на тази система са $(2,1)$ и $(1,2)$.

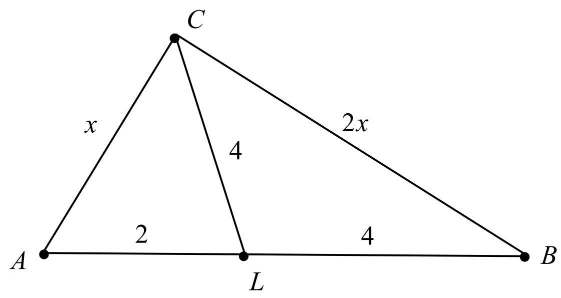
2)Нека $xy=-1$. Тогава първото уравнение на системата става $x+y=0$ и правим системата

$$\left| \begin{array}{l} x+y=0 \\ xy=-1. \end{array} \right.$$

Решенията на тази система са $(1,-1)$ и $(-1,1)$,.

Всички решения на системата са $(2,1)$, $(1,2)$, $(1,-1)$ и $(-1,1)$.

Задача 3. В ΔABC отсечката CL е ъглополовяща.. На колко градуса е равен $\angle ACB$, ако $AL = 2\ cm$, $BL = 4\ cm$ и $CL = 4\ cm$?



Фиг. 1

Решение. Тъй като CL е ъглополовяща на ΔABC (Фиг. 1), то $\dfrac{AC}{BC} = \dfrac{AL}{BL} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$

и можем да означим $AC = x$ и $BC = 2x$. От формулата $CL^2 = CA.CB - AL.BL$, т.е.

$16 = 2x^2 - 8$, намираме, че $x = 2\sqrt{3}$, откъдето $AC = 2\sqrt{3}$ и $BC = 4\sqrt{3}$.

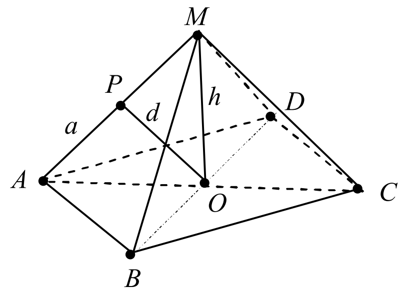
Ъгълът ACB можем да намерим от косинусовата теорема за ΔABC, т.е.

$\cos\angle C = \dfrac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2.AC.BC} = \dfrac{12+48-36}{2.2\sqrt{3}.4\sqrt{3}} = \dfrac{1}{2}$, откъдето $\angle C = 60^\circ$ или от формулата

$CL = \dfrac{2.CA.CB.\cos\frac{\gamma}{2}}{CA+CB}$, т.е. $16 = \dfrac{48\cos\frac{\gamma}{2}}{6\sqrt{3}}$, откъдето $\cos\dfrac{\gamma}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ и следователно $\dfrac{\gamma}{2} = 30^\circ$ и

$\gamma = 60^\circ$.

Задача 4. Всички ръбове на четириъгълна пирамида са равни. Да се намери обемът на пирамидата, ако разстоянието от центъра на основата до околен ръб е d.



Фиг. 2

Решение. Нека пирамидата е означена $ABCDM$ с основа $ABCD$, на която центърът е O (Фиг. 2) и $OP \perp MA$, където $P \in MA$ и $OP = d$. Да означим още дължината на ръба с a и $MO = h$. Тъй като основата е вписан четириъгълник, защото околните ръбове са равни, с равни страни, то тя е квадрат.

В квадрата $ABCD$ имаме $AO = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$. Удвоеното лице на ΔAOM изразяваме по два начина, а именно $AM.OP = AO.MO$ и получаваме $a.d = \dfrac{a}{\sqrt{2}}h$. След съкращаване на a получаваме, че $h = \sqrt{2}d$. От Питагоровата теорема за същия триъгълник $AO^2 + OM^2 = AM^2$, т.е. $\dfrac{a^2}{2} + h^2 = a^2$, като използваме, че $h^2 = 2d^2$, получаваме, че $a^2 = 4d^2$. Тъй като $S_{ABCD} = a^2$, то $V = \dfrac{1}{3}a^2h = \dfrac{4\sqrt{2}}{3}d^3$.