Решения на задачите от конкурсния изпит по математика, проведен на 10.04.2010 г. в ЮЗУ „Неофит Рилски – Благоевград.

Задача 1. Да се реши неравенството

$$\frac{x+7}{x-2} > x-1.$$

Решение. Неравенството е определено за всяка стойност на x, различна от 2.

Като прехвърлим $x-1$ от другата страна на знака на неравенството и приведем под общ знаменател получаваме еквивалентното неравенство

$$\frac{-x^2+4x+5}{x-2} > 0.$$

Решенията на това неравенство съвпадат с решенията на двете системи

$$\left| \begin{array}{l} -x^2+4x+5>0 \\ x-2>0. \end{array} \right.$$

и

$$\left| \begin{array}{l} -x^2+4x+5<0 \\ x-2<0. \end{array} \right.$$

Решения на първата система са $x \in (-1,5) \cap (2,+\infty) = (2,5)$, а на втората са $x \in [(-\infty,-1) \cup (5,+\infty)] \cap (-\infty,2) = (-\infty,-1)$.

Отг. Решенията на неравенството са $x \in (-\infty,-1) \cup (2,5)$.

Задача 2. Да се реши системата уравнения

$$\left| \begin{array}{l} 3x-y=1 \\ |x-2y|=2. \end{array} \right.$$

Решение. Решенията на системата съвпадат с решенията на двете системи

$$\left| \begin{array}{l} 3x-y=1 \\ x-2y=2. \end{array} \right.$$

и

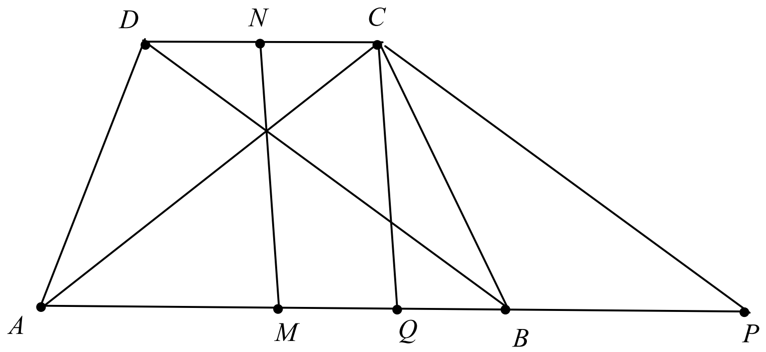
$$\left| \begin{array}{l} 3x-y=1 \\ x-2y=-2. \end{array} \right.$$

Решение на първата система е двойката $(0,-1)$, а на втората - $\left(\frac{4}{5},\frac{7}{5}\right)$.

Отг. Системата има две решения $(0,-1)$ и $\left(\frac{4}{5},\frac{7}{5}\right)$.

Задача 3. Да се намери лицето на трапец, на който диагоналите имат дължини $6\ cm$ и $8\ cm$, а отсечката свързваща средите на основите е равна на $5\ cm$.

Решение. Нека правата през C, успоредна на BD, пресича правата AB в точка P (Фиг.1). Триъгълникът APC има страни $AC = 6\ cm$, $PC = 8\ cm$ и $AP = a+b$, където $AB = a$ и $DC = b$. Височината h на този триъгълник към страната AP е равна на височината на трапеца. Лицето на ΔAPC и на трапеца $ABCD$ са равни на $\frac{1}{2}(a+b)h$, т.е. тези лица са равни. Вместо на трапеца ще пресметнем лицето на този триъгълник.



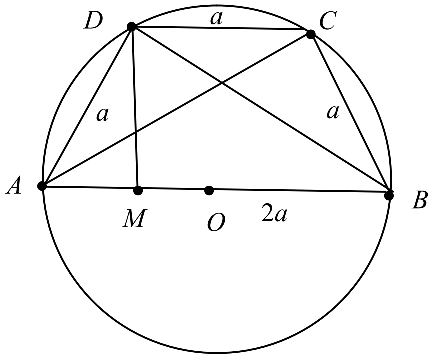
Фиг. 1

Построяваме отсечка $CQ(Q \in AB)$ успоредна на MN. Тъй като $AQ = AM + MQ = \frac{a}{2} + \frac{b}{2} = \frac{a+b}{2}$ и $AP = a + b$, то CQ е медиана на ΔAPC. От формулата за изразяване на дължината на медианата чрез дължините на страните на триъгълник, т.е. $4.CQ^2 = 2.CA^2 + 2.CP^2 - AP^2$, намираме, че $AP = 10$. Лицето на ΔAPC изчисляваме по Хероновата формула, а именно $S = \sqrt{12.4.6.2} = 24$.

Отговор. $S_{ABCD} = 24\ cm^2$.

Задача 4. Околните ръбове на четириъгълната пирамида $ABCDM$ са равни. Основата $ABCD$ има страни $AB = 2a$, $BC = CD = AD = a$. Височината на пирамидата също има дължина a. Да се намери лицето на стената MAB.

Решение. Тъй като околните ръбове на пирамидата са равни, то основата $ABCD$ на пирамидата е вписана в окръжност (Фиг.2). Да означим тази окръжност $k(O,R)$.



Фиг. 2

От теоремата, че на равни хорди на окръжност прилежащите дъги са равни, получаваме, че $\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{DC} = \overset{\frown}{BC}$. От това следва, че са равни $\angle DAC = \angle CAB = \angle ABD = \angle DBC$, като вписани ъгли с равни прилежащи дъги. От

$\angle ADC = \angle DCB$ получаваме още, че $AC = BD$. Тъй като диагоналите на четириъгълника $ABCD$ са равни и образуват равни ъгли с AB следва, че $ABCD$ е равнобедрен трапец.

Нека DM е височина на трапеца. От $AM = \frac{1}{2}(AB - DC) = \frac{1}{2}a$ и $AD = a$ следва, че в ΔAMD $\angle ADM = 30°$. Тогава $\angle DAB = 60°$ и получаваме, че $\angle CAB = \frac{1}{2}\angle DAB = 30°$.

От $\angle CAB = 30°$ и $\angle CBA = 60°$ следва, че в ΔCAB ъгълът $ACB = \boldsymbol{90}°$, откъдето следва, че O е средата на отсечката AB и височината $MO = a$ лежи в стената MAB. Лицето на ΔMAB и равно на $\frac{1}{2}2a.a = a^2$.

Отговор. Лицето на стената ΔMAB е a^2.

КРИТЕРИЙ ЗА ОЦЕНЯВАНЕ.

Правилното решение на коя да е от задачите се оценява с по 4 точки. Общата оценка се изчислява по формулата

$$\boldsymbol{2} + \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{4}}n,$$

където n е сборът от набраните точки от четирите задачи.