Решения на задачите от конкурсния изпит по математика, проведен на 14.07.2010 в ЮЗУ “Н. Рилски”.

Задача 1. Да се реши неравенството

$$\sqrt{4x-8} \geq x-5.$$

Решение. ДМ: $4x-8 \geq 0$, т.е. $x \geq 2$.

А) Нека $x<5$. Тогава дясната страна на неравенството е отрицателна, откъдето следва, че неравенството има за решения решенията на системата $\left| \begin{array}{l} x \geq 2 \\ x<5. \end{array} \right.$. Тези решения са $x \in [2,5)$.

Б) Нека $x \geq 5$. Повдигаме двете части на неравенството в квадрат и получаваме неравенството $x^2-14x+33 \leq 0$, на което решенията са $x \in [3,11]$. Като добавим условието Б получаваме решенията $x \in [\boldsymbol{5},\boldsymbol{11}]$.Тези решения са от ДМ и следователно са решения на даденото неравенство.

Отговор: $x \in [2,5) \cup [5,11] = [2,11]$.

Задача 2. Да се реши системата уравнения

$$\left| \begin{array}{l} \log_y x + \log_x y = 2 \\ x+y^2 = 12. \end{array} \right.$$

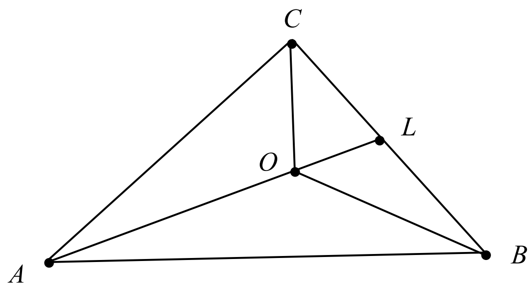
Решение. ДМ: $x>0, x \neq 1, y>0, y \neq 1$.

Тъй като $\log_y x = \dfrac{1}{\log_x y}$, като положим $\log_x y = u$, получаваме уравнението $u^2-2u+1=0$, т.е. $(u-1)^2=0$, което има единствен корен $u=1$. Следователно $\log_x y = 1$, откъдето следва, че $y=x$.

Заместваме във второто уравнение, което приема вида $x^2+x-12=0$. Това уравнение има един положителен корен $x=3$. Следователно решение на системата е само двойката числа $(3,3)$.

Отговор. $(3,3)$.

Задача 3. В правоъгълния триъгълник ABC с $\angle C = 90^\circ$ отсечката $AL = 8\sqrt{10}\ cm$ е ъглополовяща. Центърът O на вписаната в триъгълника окръжност дели AL в отношение $AO:OL = 3:1$. Да се намери лицето на ABC.



Фиг. 1

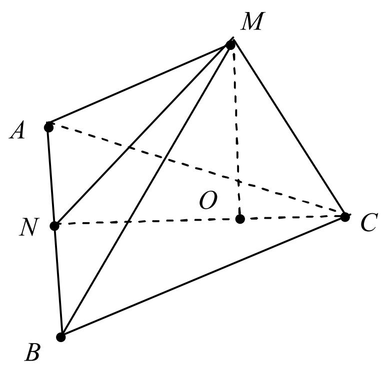
Решение. В ΔACL (Фиг. 1) отсечката CO е ъглополовяща. От това следва, че $CA:CL = AO:OL = 3:1$. Следователно, ако означим $CL = x$ имаме $CA = 3x$. От Питагоровата теорема за ΔACL намираме $\left(8\sqrt{10}\right)^2 = x^2 + (3x)^2$, откъдето получаваме $x = 8$. Следователно $CL = 8\ cm$, $AC = 3CL = 24\ cm$.

Отсечката BO е ъглополовяща на ΔABL, откъдето $AB:BL = 3:1$. Тогава, ако $BL = y$, то $AB = 3y$. От Питагоровата теорема за ΔABC имаме $(3y)^2 = (y+8)^2 + 24^2$ или $y^2 - 2y - 80 = 0$. Това уравнение има един положителен корен $y = 10$. Така получаваме, че $BC = CL + LB = 8\ cm + 10\ cm = 18\ cm$.

Лицето на ΔABC е $\dfrac{1}{2} AC.BC = 216\ cm^2$.

Отговор. $S_{ABC} = 216\ cm^2$.

Задача 4. В триъгълната пирамида $ABCM$ основата ABC е равнобедрен триъгълник с $AB = 10\ cm$ и $AC = BC = 13\ cm$. Околните стени имат равни периметри, а $MC = 10\ cm$. Да се намери обемът на пирамидата.



Фиг. 2

Решение. От равенството на периметрите на ΔACM и ΔBCM (Фиг. 2) имаме $13\ cm + 10\ cm + AM = 13\ cm + 10\ cm + BM$, откъдето следва, че $AM = BM$. От равенството на периметрите на ΔABM и ΔBCM имаме $10\ cm + AM + BM = 13\ cm + BM + 10\ cm$, откъдето получаваме, че $AM = 13\ cm$. Следователно $AM = BM = 13\ cm$.

Нека N е средата на ръба AB на пирамидата. Тъй като MN и CN са височини в еднаквите равнобедрени триъгълници ABC и ABM, то равнината MNC е перпендикулярна на правата AB, а следователно и на равнината ABC. От това следва, че височината MO на пирамидата лежи в равнината MNC и е височина към бедрото CN на равнобедрения ΔMNC.

От правоъгълния ΔBCN намираме $CN = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{144} = 12$. Следователно $CN = MN = 12\ cm$. Тогава $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.CN = 60\ cm^2$. Лицето на ΔMNC можем да определим и чрез Хероновата формула. Тъй като $p = 17$, то $S_{MNC} = \sqrt{17.5.5.7} = 5\sqrt{119}$. Тогава, от $S_{MNC} = \frac{1}{2}CM.MO$ намираме $MO = \frac{5}{6}\sqrt{119}$. Накрая, за обема на пирамидата получаваме $V = \frac{1}{3}S_{ABC}.MO = \frac{50}{3}\sqrt{119}$.

Отговор. $V = \frac{50}{3}\sqrt{119}\ cm^3$.

КРИТЕРИЙ ЗА ОЦЕНЯВАНЕ.

Правилното решение на коя да е от задачите се оценява с по 4 точки. Общата оценка се изчислява по формулата

$$\boldsymbol{2} + \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{4}} n,$$

където n е сборът от набраните точки от четирите задачи.