Решения на задачите от кандидатстудентския изпит по математика в ЮЗУ ”Н.Рилски”
Вариант 3 (10 април 2011)

Задача 1. Да се реши уравнението

$$\sqrt{\frac{2x+2}{x+2}}-\sqrt{\frac{x+2}{2x+2}}=\frac{7}{12}.$$

Решение. ДМ за x: $\frac{x+1}{x+2}>0 \Leftrightarrow (x+1)(x+2)>0$, откъдето следва, че $x\in(-\propto,-2)\bigcup(-1,+\propto)$.

Полагаме $\sqrt{\frac{2x+2}{x+2}}=u$. ДМ за u: $u>0$.

Получаваме уравнението $u-\frac{1}{u}=\frac{7}{12}$ или $12u^2-7u-12=0$, което има корени $u_1=\frac{4}{3}$ и $u_2=-\frac{3}{4}$. Коренът $u_2\notin$ на ДМ.

От $u_1=\frac{4}{3}$ намираме, че $\sqrt{\frac{2x+2}{x+2}}=\frac{4}{3}\Leftrightarrow\frac{2x+2}{x+2}=\frac{16}{9}$, откъдето получаваме $x=7$. Тъй като 7 принадлежи на ДМ за x, то $x=7$ е решение на задачата..

Отговор: $x=7$.

Задача 2. Да се реши системата уравнения

$$\left|\begin{array}{l} 7^{x+1}.2^{y}=4 \\ y-x=3. \end{array}\right.$$

Решение. Заместваме $y=x+3$ от второто уравнение в първото и получаваме $7^{x+1}.2^{x+3}=4$ или $7^{x+1}.2^{x+1}.4=4$, откъдето следва, че $14^{x+1}=1$. Това равенство е изпълнено само при $x+1=0$. Следователно $x=-1$. От $y=x+3$ получаваме $y=2$. Следователно двойката $(x=-1,y=2)$ е единствено решение на системата.

Отговор: $(x=-1,y=2)$

Задача 3. В ΔABC с $AC=2\sqrt{2}\ cm$ и $BC=4\sqrt{2}\ cm$ отсечката CL е ъглополовяща. Ако O е центърът на описаната окръжност около ΔABC и $\angle OLC=90^\circ$, да се намери дължината на страната AB на триъгълника.

Решение. Нека лъча $\overrightarrow{CL}$ пресича описаната около триъгълника окръжност в точка M (Фиг.1). Триъгълникът COM е равнобедрен и следователно неговата височина OL е и негова медиана. Следователно $CL = ML = l$.

Нека означим $AL = x$ и $BL = y$. Тогава от $CL.ML = AL.BL$ имаме $l^2 = x.y$ От $CL^2 = CA.CB - AL.BL$ намираме, че $l^2 = 16 - x.y$.

От системата уравнения

$$\left| \begin{array}{l} l^2 = 16 - xy \\ l^2 = xy. \end{array} \right.$$

като елиминираме l, получаваме $xy = 8$.

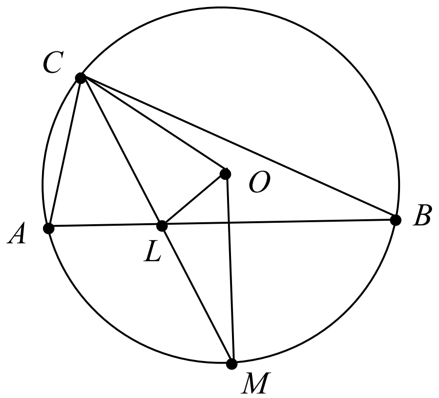
От друга страна $\dfrac{x}{y} = \dfrac{AL}{BL} = \dfrac{2\sqrt{2}}{4\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2}$.

Системата

$$\left| \begin{array}{l} xy = 8 \\ \dfrac{x}{y} = \dfrac{1}{2}. \end{array} \right.$$

има решение $x = 2,\ y = 4$. Следователно $AB = x + y = 6$.

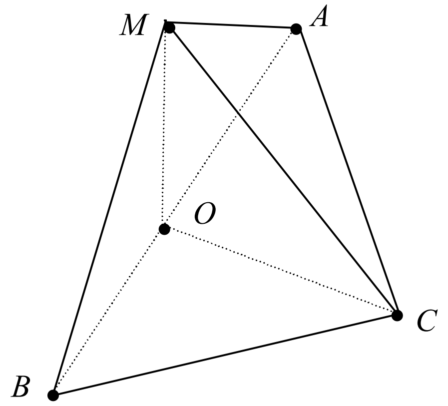
Отговор. $AB = 6\ cm$.



*Фиг.*1

Задача 4. Основата ABC на триъгълната пирамида $ABCM$ е правоъгълен триъгълник с $\angle C = 90°$ и $AC : BC = 3 : 4$. Околните ръбове на пирамидата имат дължина l и образуват с равнината на основата ъгъл $45°$. Да се намери обемът на пирамидата.

Решение. Тъй като околните ръбове на пирамидата са равни, то ортогоналната проекция O на върха M на пирамидата в равнината ABC е център на описаната окръжност около основата. Но ΔABC е правоъгълен и следователно O е средата на хипотенузата AB на триъгълника (Фиг.2).



Фиг.2

Триъгълниците MOA, MOB и AMB са равнобедрени правоъгълни и следователно $AB = l\sqrt{2}$, $MO = \dfrac{l}{\sqrt{2}}$.

Ако използваме за ΔABC стандартните означения: $AB = c,\ BC = a,\ AC = b$, имаме $c = l\sqrt{2}$, $b = \dfrac{3}{4}a$ и от Питагоровата теорема получаваме $a = \dfrac{4\sqrt{2}}{5}l$ и $b = \dfrac{3}{4}a = \dfrac{3\sqrt{2}}{5}l$.

Тогава обемът на пирамидата е $V = \dfrac{1}{3}S_{ABC}.MO = \dfrac{1}{3}.\dfrac{1}{2}a.b.MO = \dfrac{2\sqrt{2}}{25}l^3$.