Решения на задачите от кандидатстудентския изпит по математика в ЮЗУ "Н.Рилски", проведен на 8.04.2012 г.

1) Да се реши неравенството

$$\sqrt{3x-x^2} < 4-x.$$

Решение. ДМ на неравенството е $3x-x^2 \geq 0$, т.е. $x \in [0,3]$. В този интервал двете страни на даденото неравенство са неотрицателни и като повдигнем в квадрат двете му страни, получаваме неравенството $2x^2-11x+16>0$. То се удовлетворява за всяка стойност на x, тъй като дискриминантата му $D=121-128=-7$ е отрицателна, а коефициентът пред x^2 е положително число. Следователно решения на неравенството са числата от ДМ и само те.

Отговор. $x \in [0,3]$.

2) Да се реши системата уравнения

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}=\dfrac{3}{2} \\ x^2+y^2=45. \end{array} \right.$$

Решение. ДМ: $x \neq 0,\ y \neq 0.$

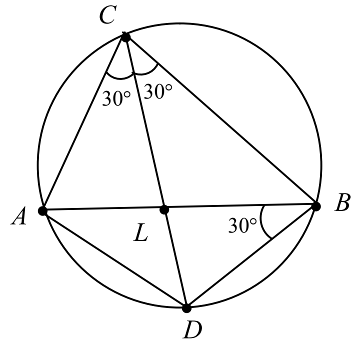
Полагаме $\dfrac{x}{y}=u$ и от първото уравнение на системата получаваме уравнението $2u^2-3u-2=0$, което има корени $u_1=2$ и $u_2=-\dfrac{1}{2}$.

а) Ако $\dfrac{x}{y}=u_1=2$, то $x=2y$ и като заместим във второто уравнение на системата, получаваме $y^2=9$, т.е. $y_1=3$ и $y_2=-3$. С тези стойности на y намираме $x_1=2y_1=6$ и $x_2=2y_2=-6$. Така получаваме решенията $(6,\ 3)$ и $(-6,\ -3)$.

б) Ако $\dfrac{x}{y}=u_2=-\dfrac{1}{2}$, то $y=-2x$. Заместваме във второто уравнение на системата и получаваме $x^2=9$, т.е. $x_3=3$ и $x_4=-3$. С тези стойности на x намираме $y_3=-2x_3=-6$ и $y_4=-2x_4=6$. Получаваме решенията $(3,\ -6)$ и $(-3,\ 6)$.

Отговор. $(6,\ 3),\ (-6,\ -3),\ (3,\ -6),\ (-3\ ,6).$

3) В триъгълника ABC са дадени $AC = 3\,cm$, $BC = 9\ cm$ и $\angle ACB = 60°$. Ъглополовящата на ъгъла ACB пресича AB в точка L и описаната около триъгълника окръжност в точка D. Да се намери лицето на ΔBLD.



Фиг. 1

Решение. Ъглите ACD и ABD (Фиг.1) са равни, като вписани ъгли в описаната около триъгълника ABC окръжност k, на които принадлежи една и съща дъга. Следователно $\angle ABD = \angle LBD = 30°$. Лицето на ΔBLD ще определим по формулата $S = \frac{1}{2} BL.BD.\sin 30°$.

За тази цел с косинусовата теорема за ΔABC намираме

$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2.AC.BC.\sin\angle ACB = 9 + 81 - 2.3.9.\frac{1}{2} = 63 = 9.7$ и следователно

$AB = 3\sqrt{7}$. След това със синусовата теорема за същия триъгълник намираме радиуса

R на k, т.е $R = \dfrac{AB}{2\sin\angle ACB} = \dfrac{3\sqrt{7}}{2\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{3\sqrt{7}}{\sqrt{3}} = \sqrt{21}$. Тогава от ΔBDC имаме

$BD = 2R\sin\angle BCD = 2.\sqrt{21}.\frac{1}{2} = \sqrt{21}.$ Дължината на отсечката BL определяме от формулата $BL = \dfrac{a.c}{a+b}$ или от зависимостта $\dfrac{AB - BL}{AC} = \dfrac{BL}{BC}$. Намираме $BL = \dfrac{9\sqrt{7}}{4}$. За

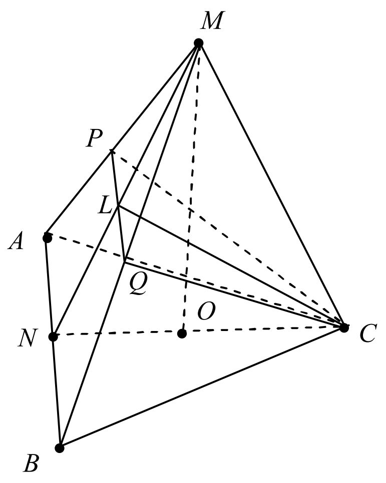
търсеното лице получаваме $S_{BLD} = \dfrac{1}{2}.\dfrac{9\sqrt{7}}{4}.\sqrt{21}.\dfrac{1}{2} = \dfrac{63}{16}\sqrt{3}$.

Отговор. $S_{BLD} = \dfrac{63}{16}\sqrt{3}\ cm^2$.

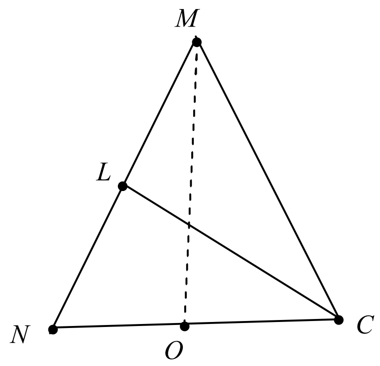
4) Пирамидата $ABCM$ е правилна. Равнината λ, която минава през основния връх C и средите на околните ръбове MA и MB, е перпендикулярна на стената MAB. Да се намери отношението от лицата на околната стена и основата на пирамидата.

Решение. Нека $P = MA \cap \lambda$, $Q = MB \cap \lambda$ (Фиг. 2), N е средата на ръба AB, $MO -$ височината на пирамидата и $L -$ пресечната точка на равнините λ, MAB и MNC.

Тъй като λ и равнината MNC са перпендикулярни на равнината MAB, то и



Фиг. 2



Фиг. 3

тяхната пресечница CL е перпендикулярна на равнината MAB, откъдето получаваме, че $CL \perp MN$ и $CL \perp PQ$. Следователно в триъгълника MNC отсечката CL е височина, а тъй като и $ML = NL$, то тя е и медиана. От това следва, че триъгълникът MNC е равнобедрен с бедра CM и CN (Фиг.3).

Лицето на триъгълника ABM е $\frac{1}{2}\mathrm{AB.MN}$, а на триъгълника ABC е $\frac{1}{2}AB.CN$.

Следователно търсеното отношение е $k=\frac{MN}{CN}=\frac{MN}{3ON}$.

Тъй като $\mathrm{h}=\sqrt{\mathrm{l}^2-\frac{1}{4}\mathrm{l}^2}=\frac{\sqrt{5}}{3}\mathrm{l}$, то $\mathrm{MN}=\sqrt{\mathrm{h}^2+\frac{1}{9}\mathrm{l}^2}=\sqrt{\frac{5}{9}\mathrm{l}^2+\frac{1}{9}\mathrm{l}^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}$. Тогава имаме $\frac{S_{ABM}}{S_{ABC}}=\frac{MN}{3.ON}=\frac{\sqrt{6}}{3}$ и $k=\frac{1}{2}.\frac{1}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{12}$.

Отговор. $\frac{\sqrt{6}}{3}$.