Решения на задачите от кандидатстудентския изпит по математика в ЮЗУ "Н.Рилски", проведен на 12.07.2012 г.

1) Да се реши неравенството

$$|x+1| \le \sqrt{x}+3.$$

Решение. ДМ: $x \ge 0$. Тогава и $x+1>0$ откъдето следва, че $|x+1| = x+1$.

Даденото неравенство приема вида $x+1 \le \sqrt{x}+3$ или $x-\sqrt{x}-2 \le 0$.

Полагаме $\sqrt{x} = u \ge 0$. Тогава $x = \left(\sqrt{x}\right)^2 = u^2$ и за u получаваме системата

неравенства

$$\left| \begin{array}{l} u^2 - u - 2 \le 0 \\ u \ge 0. \end{array} \right.$$

Решенията на първото от неравенствата на системата са $u \in [-1, 2]$ и

следователно решенията на системата са $u \in [0, 2]$.

Връщаме се в полагането и получаваме неравенствата $0 \le \sqrt{x} \le 2$ и следователно

$0 \le x \le 4$.

Отговор. $x \in [0, 4]$.

2) Да се реши системата уравнения

$$\left| \begin{array}{l} \log_3 x + \log_3 y = 0 \\ x + y = 2. \end{array} \right.$$

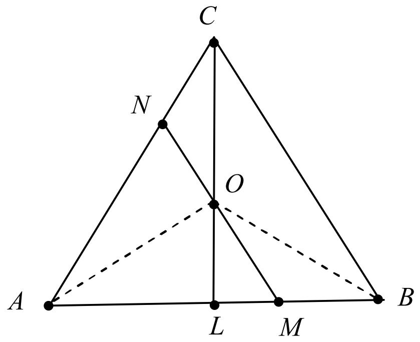
Решение. ДМ: $x>0, y>0$. Първото уравнение на системата е еквивалентно с уравнението $\log_3 xy = \log_3 1$, откъдето следва, че $xy = 1$. Системата

$$\left| \begin{array}{l} xy = 1 \\ x + y = 2. \end{array} \right.$$

има единствено решение $x = y = 1$, т.е. наредената двойка $(1,\ 1)$, която е от ДМ.

Отговор. $(1,\ 1)$.

3) В равнобедрения ΔABC с основа AB, отсечката CL е ъглополовяща, а O е центърът на вписаната в триъгълника окръжност. Правата през O, успоредна на BC, пресича страните AB и AC на триъгълника съответно в точките M и N, като $\mathrm{OM} = \boldsymbol{12}$ cm и $\mathrm{ON} = \boldsymbol{8}$ cm. Да се намерят дължините на страните на триъгълника.



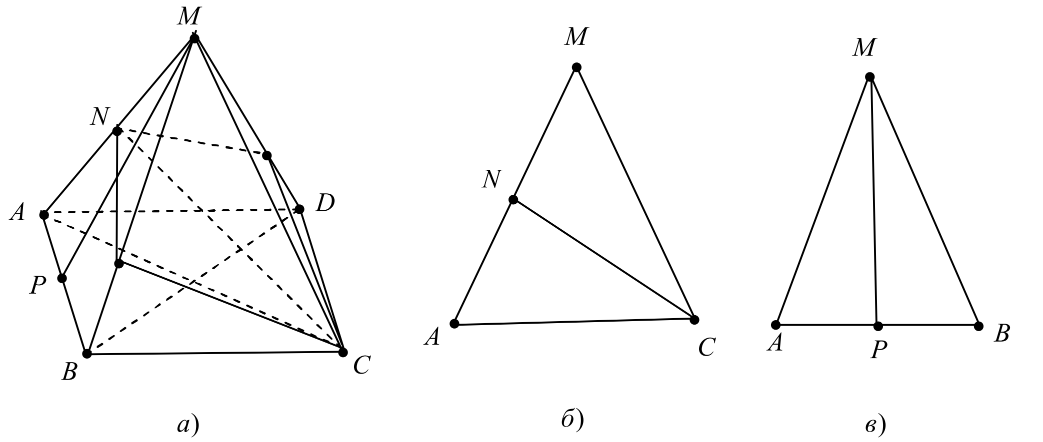
Фиг. 1

Решение. Триъгълникът AMN (Фиг. 1) е подобен на триъгълника ABC и следователно също е равнобедрен. Така $AN = MN = 20\ cm$. Отсечката AO е ъглополовяща на ΔAMN и $\frac{AM}{AN} = \frac{OM}{ON}$, т.е. $\frac{AM}{20} = \frac{12}{8}$. Оттук намираме, че $AM = 30\ cm$.

Лъчът $BO^{\rightarrow}$ е ъглополовяща на $\angle ABC$ и следователно $\angle ABO = \angle CBO$. От друга страна, ъглите CBO и MOB са равни като кръстни ъгли, получении при пресичането на успоредните прави BC и MN с правата BO. От това следва, че $\angle MOB = \angle MBO$, т.е. ΔOMB е равнобедрен с $MB = OM = 12\ cm$. Тогава $AB = AM + MB = 30\ cm + 12\ cm = 42\ cm$. С анологични разсъждения се показва, че и триъгълникът ONC е равнобедрен с $NC = ON = 8\ cm$ и следователно $AC = BC = 28\ cm$.

Отговор. $AB = 42\ cm$, $AC = BC = 28\ cm$.

4) В правилната четириъгълна пирамида $ABCDM$, симетралната равнина на околния ръб MA минава през върха C на основата $ABCD$. Да се намери отношението от лицата на околната повърхнина и основата на пирамидата.



Фиг. 2

Решение. Симетралната равнина на отсечката MA минава през средата N на отсечката и е перпендикулярна на правата MA (Фиг. 2 a). Тя е множеството от точките в пространството, които са на равни разстояния от краищата на отсечката и тъй като точката C лежи в нея, то $MC = AC.$ В правилната пирамида околните ръбове са равни и следователно $MC = MA.$ От последните две равенства следва, че триъгълникът ACM (фиг. 2 б) е равностранен.

Да означим с l дължината на околния ръб на пирамидата. Тогава лицето на основата $ABCD$, която е квадрат с дължина на диагонала l, е $S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC.BD = \frac{1}{2}l^2.$

Околната стена ABM е равнобедрен триъгълник с бедра $AM = BM = l$. Нека P е средата на основата AB (Фиг. 2 в) и $AB = a$. От $AC = l = a\sqrt{2}$ следва, че $a = \frac{l}{\sqrt{2}}$. Височината

$MP = k$ на ΔABM е $k = \sqrt{MA^2 - AP^2} = \sqrt{l^2 - \left(\frac{l}{2\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}l$. Тогава

$S_{MAB} = \frac{1}{2}a.k = \frac{1}{2}.\frac{l}{\sqrt{2}}.\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}l = \frac{\sqrt{7}}{8}l^2$. За околната повърхнина на пирамидата получаваме

$S_{ок} = 4S_{ABM} = \frac{\sqrt{7}}{2}l^2$.

За търсеното отношение получаваме $\dfrac{S_{ок}}{S_{ABCD}} = \dfrac{\sqrt{7}}{2} l^2 : \dfrac{1}{2} l^2 = \sqrt{7}$.

По-рационално решение можем да направим като отчетем, че търсеното отношение е равно на $\dfrac{1}{\cos\alpha}$, където α е мярката на двустенния ъгъл, образуван от околната стена и основата на пирамидата. $\dfrac{1}{\cos\alpha} = \dfrac{MP}{OP}$, където $O = AC \cap BD$.

Отговор. $\sqrt{7}$.